

Show and Prove



수리논술을 위한 Basic Logic & 수학 1

실전 논제 해설 모음

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 이므로 수열의 극한의 성질 (=샌드위치 정리)에 의해

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} b_n = \frac{1}{\sqrt{e}} \dots\dots ①$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+b_n)}{b_n} = 1 \dots\dots ②$ 이다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \ln(1+b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} b_n \times \frac{\ln(1+b_n)}{b_n}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (\because ①, ②)$ 이다.

[Comment 1]

위의 답안대로 풀면, 부족한 답안이다.

$a_{n+1} < b_n < a_n$ 을 활용하기 위해선 부등식 $1 + \frac{1}{(a_n)^2} \leq \frac{1}{(a_{n+1})^2}$ 이 만족하는지 확인할 필요가 있다.

따라서 아래 과정을 **답안 맨 위에 추가**해줘야 한다.

문제에서 주어진 $\{a_n\}$ 을 식조작하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{(a_n)^2} &= 1 + n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 1 + (n+1) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 1 + \frac{1}{(a_{n+1})^2} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \frac{1}{(a_{n+1})^2} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $1 + \frac{1}{(a_n)^2} \leq \frac{1}{(a_{n+1})^2}$ 만족한다. 그러므로 $a_{n+1} < b_n < a_n$ 이다. (이후 기존 답안대로 증명완료)

[Comment 2]

해설의 마지막 줄에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} b_n \times \frac{\ln(1+b_n)}{b_n}\right)$ 을 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+b_n)}{b_n}$ 으로 표현하는 것은

두 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} b_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+b_n)}{b_n}$ 이 각각 수렴할 때만 가능하다고 교과서에 명시되었기 때문에 ①, ②의 극한이

수렴함을 미리 구해놔야 함을 확인하자.

보통 마지막 결과값을 구하는 과정을 매끈하게 설명하기 위해 ①, ②의 극한값 같은 것들을 미리 구해놓는 센스는 필수가 아닌 선택의 영역이지만, 이 문제에서 이러한 센스는 **선택이 아닌 필수**이다.

TIP

문제를 푸는 당시에는 미리 구해놔야 하는 값들과 정보가 무엇이 있는지 모르는 것이 당연하다. 하지만 문제를 다 풀 상태에서 답안을 쓸 때, 내 답안이 매끄럽게 읽히는 것뿐만 아니라 논리적 하자가 없는 답안이 되기 위해서 미리 작성해 놔야 하는 필요 정보들이 무엇이 있는지 파악 후 답안을 작성하는 것을 잘하는 학생이 논술을 잘하는 학생이다.

이는 선천적인 수학적 머리보다 후천적인 노력에 달린 영역에 해당한다고 생각한다.

따라서 독자들은 수리논술 공부와 답안 첨삭을 꾸준히 하며 실력을 증진시키도록 하자.

하려면 이차방정식 $(x-t)^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 1$ 을 풀어야 하며, 그 결과로

$$x_1 = \frac{1}{4}(t - \sqrt{4-3t^2}), x_2 = \frac{1}{4}(t + \sqrt{4-3t^2})$$

를 얻는다. 그러므로

$$y_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}(t - \sqrt{4-3t^2}), y_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}(t + \sqrt{4-3t^2})$$

임을 알 수 있다. 이제 선분 PQ의 길이를 계산해보면

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{4-3t^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)^2} = 1$$

이 되므로, 호 PQ와 현 PQ 사이 영역의 넓이는 t 와 관계없이 일정하다. 삼각형 APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\overline{AP} \times \overline{AQ} \times \sin(\angle PAQ) = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AP} \times \overline{AQ}$$

로 주어지는데,

$$\overline{AP}^2 = x_1^2 + (y_1 - 1)^2 = \frac{1}{4}(t - \sqrt{4-3t^2})^2, \quad \overline{AQ}^2 = x_2^2 + (y_2 - 1)^2 = \frac{1}{4}(t + \sqrt{4-3t^2})^2$$

이므로

$$\overline{AP} \times \overline{AQ} = -\frac{1}{4}(t - \sqrt{4-3t^2})(t + \sqrt{4-3t^2}) = 1 - t^2$$

이 된다. 따라서 $f(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - t^2) + C$ (\because 호 PQ와 현 PQ 사이 영역의 넓이 C 는 t 와 관계없이 일정)이고,

$f'(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}t$ 를 얻는다.

Spoiler

본편에서 소개한 미분풀이와 부등식 풀이 중 부등식 풀이만 먹히는 문제다.

식을 전개하면 $(5 + 2x)^n = 5^n \left(1 + \frac{2}{5}x\right)^n = 5^n \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{2}{5}\right)^k x^k$ 이므로,

$a_k = 5^n {}_nC_k \left(\frac{2}{5}\right)^k$ 의 값이 최대가 되는 k 값을 구하면 된다.

$a_k \geq a_{k+1}$ 이 되는 k 의 조건을 구하자.

먼저 $a_k \geq a_{k+1}$ 이 되는 필요충분조건은 $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq 1$ 이다.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{5^n \times {}_nC_{k+1} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{k+1}}{5^n \times {}_nC_k \times \left(\frac{2}{5}\right)^k} = \frac{2}{5} \times \frac{n-k}{k+1} \leq 1$$

이다. 따라서 $k \geq \frac{2n-5}{7} = \frac{115}{7} = 16.4 \dots$ 이면 $a_k \geq a_{k+1}$ 이다.

마찬가지 방법으로 $k \leq \frac{122}{7} = 17.4 \dots$ 일 때 $a_k \geq a_{k-1}$ 이므로, 계수들의 대소관계는 다음과 같다.

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{16} < a_{17} > a_{18} > a_{19} > \dots > a_{60} \dots \dots \textcircled{1}$$

따라서 $k = 17$ 일 때, 계수 a_k 가 가장 크므로 $p = 17$ 이다.

(참고로 $a_{16} < a_{17} > a_{18}$ 의 두 부등식에서 등호가 포함되려면, $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, $\frac{a_k}{a_{k-1}} = 1$ 와 같은 상황이어야 한다.)

이제 두 번째 큰 계수를 찾기 위해 식 ①에서 a_{16} 과 a_{18} 을 비교하면 된다.

$$\frac{a_{18}}{a_{16}} = \frac{5^{60} \times {}_{60}C_{18} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{18}}{5^{60} \times {}_{60}C_{16} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{16}} = \frac{44 \times 43}{18 \times 17} \times \frac{4}{25} = \frac{7568}{7650} < 1 \text{ 이므로, } a_{18} < a_{16} \text{ 이다.}$$

따라서 두 번째 큰 계수는 a_{16} 이고, $q = 16$ 이다.

Show and Prove



수리논술을 위한 Basic Logic & 수학 1

고난도 추가 논제 해설 모음

고난도 추가 문제

문제
1

증명에서 주의할 점 # 식 관찰 # 정적분과 급수의 관계
수리논술 문제를 학습할 때의 기본 태도

① 대학 제공 해설

다음과 같이 $n = 2m$ 인 경우와 $n = 2m - 1$ 인 경우로 나누자.

(i) $n = 2m$ 인 경우

$n = 2m$ (m 은 자연수)이면,

$$\frac{n^n \times n!}{(2n)!} = \frac{n}{2n} \times \frac{n}{2n-1} \times \cdots \times \frac{n}{2n-(m-1)} \times \frac{n}{n+1+(m-1)} \times \cdots \times \frac{n}{n+2} \times \frac{n}{n+1}$$

이다. 이제

$$\frac{n}{2n} \times \frac{n}{n+1} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, \frac{n}{2n-1} \times \frac{n}{n+2} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, \cdots, \frac{n}{2n-(m-1)} \times \frac{n}{n+1+(m-1)} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

가 성립함을 보이자. $k = 0, 1, \cdots, m-1$ 에 대하여 $n-1-k \geq 2m-1-(m-1) = m \geq 0$ 이므로

$$2n^2 + 2n + k(n-1-k) \geq 2n^2$$

이다. 즉, $k = 0, 1, \cdots, m-1$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{n}{2n-k} \times \frac{n}{n+1+k} = \frac{n^2}{2n^2 + 2n + nk - k - k^2} \leq \frac{n^2}{2n^2} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

따라서

$$\frac{n^n \times n!}{(2n)!} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2m} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

이다.

그리고 $n = 1$ 이면 위 부등식은 성립한다.

(ii) $n = 2m - 1$ 인 경우

$n = 2m - 1$ (m 은 2 이상의 자연수)이면,

$$\frac{n^n \times n!}{(2n)!} = \frac{2}{2n} \times \frac{n}{2n-1} \times \cdots \times \frac{n}{2n-(m-2)} \times \frac{n}{2n-(m-1)} \times \frac{n}{n+1+(m-2)} \times \cdots \times \frac{n}{n+2} \times \frac{n}{n+1}$$

이고 $k = 0, 1, \cdots, m-2$ 에 대하여 $n-1-k \geq 2m-1-1-(m-2) = m \geq 0$ 이므로

$$\frac{n}{2n-k} \times \frac{n}{n+1+k} = \frac{n^2}{2n^2+2n+nk-k-k^2} \leq \frac{n^2}{2n^2} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

이다. 또한

$$\frac{n}{2n-(m-1)} = \frac{2m-1}{3m-1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3m-1} \leq \frac{2}{3} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이므로,

$$\frac{n^n \times n!}{(2n)!} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2(m-1)} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

이다.

② Show and Prove's 해설

문제를 풀며 시도할 만한 풀이의 흐름을 [풀이 Case.1], [풀이 Case.2], [풀이 Case.3] 으로 정리했으니, 아래의 세 과정을 모두 거치지 않았더라도 학습을 위해 모두 읽어보길 바란다.

[풀이 Case.1] - 접근 방향은 Good! 하지만...

자연수 명제에 대한 증명 문제이다. 수리논술을 조금이라도 배웠던 학생들은 바로 '수학적 귀납법'을 시도했을 것이다. (수능에 익숙한 학생들은 생각하지 못했을 수 있다.)

하지만... 이 문제의 경우, 수학적 귀납법을 사용해도 도저히 $n = k$ 인 상황과 $n = k + 1$ 인 상황의 연결고리를 찾지 못할 것이다.²⁾ 따라서 수학적 귀납법 풀이를 폐기 후 다른 풀이로 방향을 바꿔야겠다!

[풀이 Case.2] - 문제는 풀었지만, 잘못된 길에 빠진 경우

우선, 주어진 부등식을 정리하자.

$$\frac{n^n \times n!}{(2n)!} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \Leftrightarrow \frac{n^n}{(n+1) \times (n+2) \times \cdots \times (n+n)} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

이제, 이 부등식을 자세히 관찰해보자.

① 지수 부분에 n 에 대한 식

② 여러 개의 항의 곱으로 이루어진 식

으로 부등식이 이루어져 있다. 이 두 가지는 \ln 을 취하라는 신호이다! 이제 \ln 을 취하면...

좌변은 \ln 들의 덧셈으로 표현되고, 우변의 n 은 좌변으로 옮겨져 $\frac{1}{n}$ 로 표현될 것이다.³⁾

이후 양변에 극한을 보내면 우리에게 익숙한 '정적분과 급수의 관계'의 형태가 나옴을 예상할 수 있다.

오케이! 문제를 풀 실마리를 찾은 것 같으니, 주어진 부등식의 양변에 \ln 을 취한 후 정리하자.

$$\begin{aligned} \frac{n^n}{(n+1) \times (n+2) \times \cdots \times (n+n)} &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n+n}\right) &\leq n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\} &\leq -\ln \sqrt{2} \end{aligned}$$

정리한 부등식의 양변에 극한을 보내면, 정적분과 급수의 관계에 의하여 다음 부등식이 등장한다.

$$\int_0^1 -\ln(1+x) dx \leq -\ln \sqrt{2}$$

2) 찾는다고 하더라도, 수학적 귀납법으로 풀기 어려운 이유를 수업에서도 설명하고 있다.

3) 항상 구체적인 풀이 전, 문제의 흐름이 어떻게 될지 예측 후 풀이에 들어가는 습관을 갖자.

이때, $\int_0^1 -\ln(1+x)dx = \ln \frac{e}{4} \leq -\ln \sqrt{2}$ 이므로 위의 부등식은 참이다.

따라서 ㉠의 부등식 또한 성립함을 알 수 있다.

여기서 잠깐!

위의 증명이 과연 감점이 없는 100점짜리 증명일까?

No!! 이렇게 하면, 증명 내에선 구구절절 옳은 수학적 논리만 썼음에도 0점짜리 답안이 된다.

왜? 극한을 보내는 $n \rightarrow \infty$ 인 상황만의 증명은 ‘모든’ 자연수 n 에 대한 증명이 아니기 때문이다.

문제를 풀다보면 ‘스스로가 문제에게 원하는 방향’에만 집중하고, 또 그렇게 풀게 된다.

이 문제의 경우 ‘정적분과 급수의 관계’에만 몰두했던 학생들이 이런 오답을 작성했을 가능성이 높다.

이처럼 문제를 본인 맘대로 한정지어 풀면 안된다! 우리가 공부해야 하는 수리논술은

충분한 논리를 바탕으로, 문제에서 원하는 것을 서술하는 시험

임을 꼭 기억하자.

그렇다면... 어떻게 증명해야 본인의 증명이 100점짜리 증명이 될 수 있을까?

[풀이 Case.3] - 올바른 풀이로의 진행

이번에도 주어진 부등식을 정리하자.

$$\begin{aligned} \frac{n^n \times n!}{(2n)!} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n &\Leftrightarrow \frac{n^n}{(n+1) \times (n+2) \times \cdots \times (n+n)} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \times \frac{n}{n+2} \times \cdots \times \frac{n}{n+n} \leq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{n\text{개}} \end{aligned}$$

‘정적분과 급수의 관계’의 사용은 당연히 불가능하므로, 좌변의 식을 다른 표현으로 이해해보자.

식이 워낙 복잡하니 조금씩 뜯어서 관찰해야겠다는 생각은 충분히 가능할 것이다. (?)

부등식의 좌변이 $\frac{n}{n+1} \left(\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 이하 $\frac{n}{n+n} \left(\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 이상의 분수들의 곱으로 이루어져 있다.

각각의 분수들이 모두 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 보다 작다면 부등식을 쉽게 증명할 수 있겠지만 아쉽게도 실패했으므로...

각각의 분수들을 두 개씩 중심 대칭적으로 곱한 분수들이 모두 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ 보다 작음을 보이자. (?)

발상의 근거!

왜 굳이 각각의 분수들을 두 개씩 '중심 대칭적'으로 묶어서 관찰하는걸까? 왜냐면...

- ① 분수를 하나씩 관찰하는 것이 실패했으니, 두 개씩 묶어서 관찰하는 방법으로 넘어간 것
- ② 각각의 분수들이 $\frac{n}{n+1}$ 부터 $\frac{n}{n+n}$ 까지 증가하며 구성되기 때문

즉, ①과 ②를 종합한

'가장 큰 분수와 가장 작은 분수를 곱해 **증화시켜**⁴⁾ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ 보다 작게 만들 수 있지 않을까?'

라는 생각에서 나온 발상인 것이다.

따라서, 자연수 k 와 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이자.

$$\frac{n}{(n+k)} \times \frac{n}{(2n+1-k)} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad (1 \leq k \leq n) \quad \cdots \cdots \textcircled{L}$$

위의 부등식을 잘 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{n}{(n+k)} \times \frac{n}{(2n+1-k)} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 &\Leftrightarrow 2n^2 \leq 2n^2 + (1+k)n + k - k^2 \\ &\Leftrightarrow k(k-1) \leq n(k+1) \end{aligned}$$

이때, $1 \leq k \leq n$ 이므로 자연수 k 와 모든 자연수 n 에 대하여 ①의 부등식이 성립한다.

이제 ①의 부등식에 $k=1, 2, \dots, n$ 을 대입한 식을 변변 곱하면, 부등식

$$\frac{n}{n+1} \times \frac{n}{n+2} \times \cdots \times \frac{n}{n+n} \leq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{n \text{ 개}}$$

이 성립함을 알 수 있다. (증명 끝!)

4) 큰 값에 작은 값을 곱하여 수 자체의 크기를 줄인다는 뜻이다.

③ Comment

[Comment 1]

본편에서 다뤘던 대로, 자연수 명제의 해법이 언제나 수학적 귀납법인 것은 아니다. 어떤 풀이로 문제가 풀리지 않을 때, 본인의 풀이를 다시 한번 점검하는 것은 물론 좋은 태도이다. 하지만 ‘이 문제는 무조건 이 유형일거야. 내가 모르는 무언가가 있을테니 계속 해보자.’와 같은 태도는 좋지 않다. **문제를 대할 때는 언제나 여러 가지 방향을 채택할 필요가 있다. 어떤 풀이로 문제가 풀리지 않는다면, 충분히 풀이를 점검 후 다른 풀이로 넘어가는 용기를 갖도록 하자.**

[Comment 2]

해설의 ‘식이 워낙 복잡하니 조금씩 뜯어서 관찰해야겠다는 생각은 충분히 가능할 것이다.’와 같은 생각 못 했다고 기죽을 필요 없다. **본인이 처음 만나는 관찰/계산 테크닉이 있다면, 이를 수집 후 암기하여 다른 곳에서도 사용할 수 있도록 연습하는 것이 가장 중요하다.** 이렇게 하나하나 수집하다보면 언젠가 남들이 ‘이건 말이 안돼!’ 라고 하는 것들도 ‘이건 당연히 할 수 있는 건데?’ 하는 자신을 보게 될 것이다.

[Comment 3]

수리논술의 가장 큰 벽인 발상 학습법에 대해서 알아보자. 우선, 수리논술의 발상은 크게 두 가지로 분류할 수 있다.

- ① 수리논술 개념을 공부했다면 충분히 떠올릴 수 있어야 하는 발상
- ② 본인의 순수 수학 실력만으로 떠올려야 하는, 근거가 1도 없는 뜬금포 발상

①의 경우는 단순 학습 부족이므로, 꾸준히 수리논술을 학습하면 실력이 늘어난다. 문제는 ②의 경우인데... 이런 발상들에 대한 학습은 어떻게 진행해야 할까? 이에 대한 대답은 생각보다 간단하다.

- ① 발상은 **일단 암기하고**⁵⁾ 나머지 부분이라도 원래 하던 대로 공부한다.
- ② 발상의 근거에 대하여 **간단히**⁶⁾ 생각 후, 일단 Pass 한다.

이때, 발상의 근거에는 **사후적 근거**도 있다. 사후적 근거란 ‘문제를 다 푼 시점에서야 확인할 수 있는 발상의 근거’를 뜻한다. 즉, 문제풀이 결과값을 통해 입력값의 근거를 유추하는 것이다. 말이 어렵지 단순히 ‘아 이런 과정이 필요해서 이 발상을 떠올린 거구나~’라고 **가볍게 생각** 후 넘어가면 된다. 왜? 이제부터 알면 되는 거니까.

‘시험 보기 몇 달 전의 너는 이걸 모르고 있었으니, 아쉽지만 감점이다 닝겐.’

라고 대학이 얘기하진 않잖아...? **시험 보는 시점에서의 우리가 이것들을 알고 있으면, 그걸로 장땡이다.** 발상의 사후적 근거는 이후 해설에서도 언급하며 넘어갈 것이니, 거르지 말고 전부 읽어보도록 하자.

우리의 공부는 시험을 ‘**대비**’ 하는 것임을 기억하자. 당장의 정답 여부가 중요한 것이 아니란 것이다.⁷⁾

5) 대신 이 발상을 다음에 다시 만났을 때, 또 틀리는 일은 없도록 철저히 암기하는 것이 좋겠다.

6) 말 그대로 ‘뜬금포 발상’ 이기에 너무 깊게 생각해보는 건 정신 건강에 해롭다. 스트레스 받지 말자.

7) 시험 전에 미리 틀려서 렉키비키잖아~

④ 최종답안

부등식 $\frac{n}{n+k} \times \frac{n}{2n-1+k} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (1 \leq k \leq n) \dots \textcircled{1}$ 을 증명하자.

$$\Leftrightarrow 2n^2 \leq 2n^2 + (1+k)n + k - k^2$$

$$\Leftrightarrow k(k-1) \leq n(k+1)$$

이때, $k \leq n$, $k-1 < k+1$ 이므로 위 부등식이 성립한다.

$\therefore \textcircled{1}$ 성립.

①의 부등식에 $k=1, 2, \dots, n$ 을 대입하면

$$\frac{n}{n+1} \times \frac{n}{2n} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{n}{n+2} \times \frac{n}{2n-1} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

\vdots

$$\frac{n}{2n} \times \frac{n}{n+1} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ 이고,}$$

위 n 개의 부등식을 모두 곱하면,

$$\left\{ \frac{n^n}{(n+1) \times (n+2) \times \dots \times 2n} \right\}^2 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{n^n}{(n+1) \times (n+2) \times \dots \times 2n} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{n^n \times n!}{(2n)!} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

\therefore 주어진 부등식이 성립한다.

수열의 최대/최소 추론 # 여러 가지 변수의 관계 해석 # 조건의 순서 (포함관계)

수열의 최대/최소는 언제나 일관된 방법으로 접근한다.

① 대학 제공 해설

제시문 (가)의 (ㄷ)는 범위에 포함되는 x 와 $1 \leq k \leq 5n$ 인 모든 자연수 k 에 대하여

$$\frac{1}{k} \ln \frac{k}{x} \leq \frac{1}{n} \ln \frac{n}{x}$$

이 성립함을 말한다.

그런데, 자연수 k 와 임의의 양의 실수 x 에 대하여

$$\frac{1}{k} \ln \frac{k}{x} - \frac{1}{k+1} \ln \frac{k+1}{x} = \frac{1}{k(k+1)} \ln \frac{k^{k+1}}{(k+1)^k x} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이므로, $x \leq \frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}$ 이면 $\frac{1}{k} \ln \frac{k}{x} \geq \frac{1}{k+1} \ln \frac{k+1}{x}$ 이고, $x > \frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}$ 이면 $\frac{1}{k} \ln \frac{k}{x} < \frac{1}{k+1} \ln \frac{k+1}{x}$ 이다.

이때,

$$\frac{\frac{(k-1)^k}{k^{k-1}}}{\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}} = \left(\frac{k^2-1}{k^2} \right)^k < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이므로 $\frac{(k-1)^k}{k^{k-1}} < \frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}$ 이 성립하여, k 가 증가함에 따라 $\frac{1}{k} \ln \frac{k}{x}$ 는 증가하다가 감소하는 형태가 된다.

따라서, 제시문 (가)의 (ㄷ)가 성립하려면, $\frac{1}{k} \ln \frac{k}{x}$ 가 $1 \leq k \leq n$ 에서 증가하고 $n \leq k \leq 5n$ 에서 감소해야 한다.

식 ①에 $k = n$ 을 대입하면 $x \leq \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$ 인 경우,

$$\frac{1}{n} \ln \frac{n}{x} \geq \frac{1}{n+1} \ln \frac{n+1}{x} \geq \frac{1}{n+2} \ln \frac{n+2}{x} \geq \cdots \geq \frac{1}{5n} \ln \frac{5n}{x}$$

이다.

식 ①에 $k = n - 1$ 을 대입하면 $\frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} < x$ 인 경우,

$$\frac{1}{n} \ln \frac{n}{x} > \frac{1}{n-1} \ln \frac{n-1}{x} > \frac{1}{n-2} \ln \frac{n-2}{x} > \dots > \ln \frac{1}{x}$$

이다.

즉, $\frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} < x < \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$ 에서 집합 $\left\{ \frac{1}{k} \ln \frac{k}{x} \mid 1 \leq k \leq 5n, k \text{ 는 자연수} \right\}$ 의 원소 중 최댓값은 $\frac{1}{n} \ln \frac{n}{x}$ 이다.

또한, (②)에 의하여 $\frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} < \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$ (\because 제시문 (가)의 (ㄴ))이므로, $a_n = \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$ 이다.

$$\left(\frac{a_n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n-1}{n}, \left(\frac{a_{n+1}}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \text{ 이므로,}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a_{n+1}}{n} \right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a_n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

이다.

② Show and Prove's 해설

문제에서 변수(= 미지수)가 두 개 이상 등장하면 무조건 각 변수가 서로 어떻게 작용하는지 관계파악이 먼저다.
문제의 조건과 변수의 관계를 차근차근 정리하면...

- ① n 이 주어짐으로써, a_n 과 a_{n+1} 의 값이 결정된다.
- ② a_n 과 a_{n+1} 의 값이 결정됨으로써, a_n 과 a_{n+1} 의 사이의 값으로 어떤 실수 x 가 결정된다.
- ③ x 가 결정됨으로써, k 에 대한 함수 $\frac{1}{k} \ln \frac{k}{x}$ 가 결정된다.
- ④ 이때, 함수 $\frac{1}{k} \ln \frac{k}{x}$ 는 언제나 $k = n$ 에서 최댓값을 가진다.

라는 사실들을 알 수 있다.

여기서 잠깐!

위의 내용을 읽고도 아직 혼란스러운 학생이 있을 수 있다. 이를 수능 친화적으로 표현하면 다음과 같다.

(~ 대충 상수 p 는 n 에 따라 달라진다는 말 ~) (\Leftrightarrow ②)

이때, 상수 p 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{x}{p}$ 가 다음 조건을 만족시킨다. (\Leftrightarrow ③)

자연수 n 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{x}{p}$ 가 항상 $x = n$ 에서 최댓값을 갖는다. (\Leftrightarrow ④)

(~ 대충 답 구하라는 말 ~)

우선, 답안 작성과 해설의 편의성을 위하여 $q_k = \frac{1}{k} \ln \frac{k}{x}$ 라는 수열을 설정하자.

문제에서 수열 $\{q_k\}$ 가 ' $k = n$ 에서 최댓값을 갖는다.'고 했다. 수열의 최댓값 조건?
우리가 배웠던 부등식 풀이의 관점으로 이 조건을 해석해보면...

'주어진 n 이 부등식 $q_{n-1} \leq q_n$ 과 $q_n \geq q_{n+1}$ 을 모두 만족시킨다.'

라는 사실을 알 수 있다. 각각의 부등식을 차례대로 잘 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad q_{n-1} \leq q_n &\Leftrightarrow \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} \leq x \\ \textcircled{2} \quad q_n \geq q_{n+1} &\Leftrightarrow x \leq \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} \end{aligned} \quad \text{를 종합} \Rightarrow \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} \leq x \leq \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$$

(수열 $q_k = \frac{1}{k} \ln \frac{k}{x}$ 가 $k = n$ 에서 최댓값을 갖는다는 조건을 정리한 결과)

먼저, 답안 작성과 해설의 편의성을 위하여 $b_n = \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$ 이라는 수열을 설정하자.

이제, 지금까지의 모든 사실들을 ‘문제 조건의 순서에 맞춰’ 단계별로 정리하면 다음과 같다.

$$\underline{a_n < x < a_{n+1}} \Rightarrow q_k \text{가 } k=n \text{에서 최대} \Rightarrow \underline{b_n \leq x \leq b_{n+1}},$$

조건의 인과관계가 살짝 어려우니... 이를 집합의 관점으로 풀어서 x 에 대해 바라보자!

여기서 잠깐!

왜 갑자기 x 에 대한 조건을 관찰하는걸까? 왜냐면... 지금까지 최댓값 조건을 정리하여 x 에 대한 조건을 찾아냈으니, 이제부터는 이를 사용하기 위해 x 에 대하여 집중하는 것이다.

명제 기호의 정의와 벤다이어그램을 잘 떠올리면...

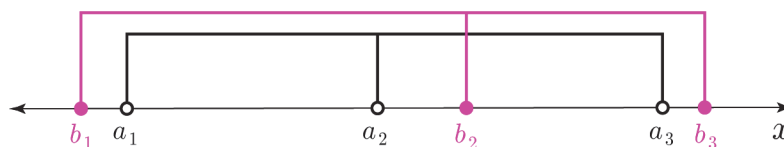
$$\{ \text{부등식 } a_n < x < a_{n+1} \text{를 만족시키는 } x \text{의 집합} \} \subset \{ \text{부등식 } b_n \leq x \leq b_{n+1} \text{를 만족시키는 } x \text{의 집합} \}$$

임을 알 수 있다!

모든 자연수 n 에 대하여, 부등식 $a_n < x < a_{n+1}$ 가 부등식 $b_n \leq x \leq b_{n+1}$ 에 포함되어야 한다?

부등식의 범위를 수직선 위에 표현하면 더욱 쉽게 해석이 가능하겠다.

먼저, 수직선 위에 a_n 의 위치들을 대략 찍어 부등식 $a_n < x < a_{n+1}$ 의 범위들을 표현한 후, 위의 조건에 맞춰 수직선 위에 b_n 의 위치들을 찍어보자.



($n=1$ 인 상황과 $n=2$ 인 상황 동시 만족 불가능!)

당장 위의 그림처럼 부등식들의 범위를 수직선 위에 조금이라도 그려본 학생이라면...

어렵지 않게 $a_n = b_n$ 인 상황에서만 문제의 조건이 만족함을 알 수 있을 것이다!

따라서, 위의 결과에 의해 $a_n = \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} (= b_n)$ 임을 알 수 있다.

a_n 의 식을 구했으니, 이를 이용해 그대로 S 의 값을 계산하면 문제 끝! (단순 대입하여 계산하면 $S=1$)

여기서 잠깐!

위의 해설에서 약간의 이상함을 느끼지 못 했는가? 우리가 배운 ‘부등식 풀이’의 논리에 의하면

$\{q_k\}$ 가 $k = n$ 에서 최대 \Rightarrow 부등식 $q_{n-1} \leq q_n$ 과 $q_n \geq q_{n+1}$ 이 성립

가 항상 참이다. 하지만 위의 해설에서는 위의 명제의 역인

부등식 $q_{n-1} \leq q_n$ 과 $q_n \geq q_{n+1}$ 이 성립 ($\Rightarrow a_n = \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$) $\Rightarrow \{q_k\}$ 가 $k = n$ 에서 최대

를 사용하였다. 즉, 위의 부등식 $q_{n-1} \leq q_n$ 과 $q_n \geq q_{n+1}$ 을 만족한다고해서 반드시 수열 $\{q_k\}$ 가 $k = n$ 에서 최대임을 보장할 수 없다. 오로지 극대인 것만을 보장할 수 있는 상황.

그러니까, $a_n = \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$ 이라 했는데 막상 검토해보니 부등식 $q_{m-1} \leq q_m$ 과 $q_m \geq q_{m+1}$ 을

만족시키면서 $q_n < q_m$ 인 자연수 m 이 존재할 수도 있지 않은가?

그러면 제시문의 (ㄷ) 조건을 만족시키지 못하므로,

‘문제의 조건을 만족시키는 a_n 은 존재하지 않으므로,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a_{n+1}}{n} \right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a_n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \right\} \text{의 값도 존재하지 않는다.}^*$$

가 이 논제의 정답이 되는 것이다.

위와 같은 이유로 이상함을 느꼈다면, 정말로 수학적인 논리가 탄탄한 학생이다.¹⁶⁾ 이러한 의문을 스스로 품었다면 자기 자신의 머리를 쓰다듬어 주도록.

그러면 이러한 의문은 어떤 방법으로 해결해야 할까?¹⁷⁾ 바로 본편에서 ‘부등식 풀이’보다 덜 추천하던 풀이인 ‘미분 풀이’를 활용하면 된다.

$q_k = \frac{1}{k} \ln \frac{k}{x}$ 대신 함수 $f(k) = \frac{1}{k} \ln \frac{k}{x}$ 를 생각하자. (변수가 x 가 아니고 k 임에 유의하자.)

도함수 $f'(k)$ 를 이용하여 곡선 $y = f(k)$ 을 그려보면 $k = ex$ 에서 유일한 극대를 갖는 그래프가 나온다.

즉, 이 함수는 증가하다가 감소하여 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = 0$ 으로 다가간다.

수열의 그래프는 이 함수의 그래프에 포함되는 점들의 집합이기 때문에, 수열도 마찬가지로 증가하다가 감소하는 경향을 꼭 유지하게 된다.

즉, 부등식 $q_{k-1} \leq q_k$ 과 $q_k \geq q_{k+1}$ 를 만족하는 자연수 k 가 n 으로 유일할 수 밖에 없다! 이렇게 검증을 마무리할 수 있다.

16) 이상함을 못 느꼈어도 괜찮다. 지금까지 풀었던 실전 문제는 ‘최대/최소 지점을 추론하는 문제’였던 반면, 이 문제는 ‘최대/최소 지점을 미리 알려주고 이를 이용하는 문제’라고 충분히 실수를 범할만 하다. 너무 좌절하지 말 것!

17) 참고로 최종답안에서는 이 ‘추가 검증’을 생략하고, 최대한 컴팩트하게 답안을 작성하였다.

③ Comment

[Comment 1]

수열의 최대/최소를 파악하는 문제가 나왔을 때, 이를 판단하는 방법이 두 가지 있다고 본편에서 언급했었다.

- ① 두 부등식 $a_{n-1} \leq a_n$ 과 $a_n \geq a_{n+1}$ 을 동시에 만족시키는 n 을 최대/최소 ‘후보 지점’으로 두는 풀이
- ② $a_n = f(n)$ 으로 두고 미분을 통해 $f(n)$ 의 그래프를 그린 후, 최대/최소 후보 지점을 찾는 풀이

이때,

①의 방법에서 나온 부등식의 해는 ‘후보 지점’임을 항상 기억하자. 모든 극대값이 최댓값은 아닌 것과 같은 논리!

이제, 위의 해설을 살펴보자. 본편에서 배운 내용을 벗어나는 것이 하나라도 있었는가? No! 단 하나도 없었다. 이처럼 수열의 최대/최소에 대한 조건을 만났을 때는 항상 일관된 방법으로 접근하는 것이 중요함을 기억하자. 왜? 이미 꽤 많은 기출에서 등장한 소재이니 만큼 풀이 방법이 정해져 있기 때문이다.

[Comment 2]

[Comment 1]의 부등식 풀이를 표현만 살짝 변형하면 다음과 같다. a_n 의 모양에 따라 편한 표현을 선택하자.

- ① $a_{n+1} - a_n$ 의 부호 통해 a_n 의 증감을 파악 후, 최대/최소 후보 지점을 찾는 풀이
- ② $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 과 1 의 대소비교를 통해 a_n 의 증감을 파악 후, 최대/최소 후보 지점을 찾는 풀이

부등식 풀이의 근본이 ‘부등식의 작성을 통한 a_n 의 증감파악 후 최대/최소 후보 찾기’임을 잘 기억해두면 되겠다.

[Comment 3]

가끔씩 문제에서 여러 변수(= 미지수)가 등장하고, 그 변수들의 관계가 복잡하게 얽힌 상황이 등장한다. 이런 경우, 문제를 쭉 읽고 차근차근 단계별로 변수들의 관계를 파악하면 그리 어려운 것이 없다. 이때,

어떤 변수가 주어졌을 때 → 어떤 과정을 거쳐 → 어떤 변수가 결정됨

와 같은 세 Step으로 미지수들의 관계를 파악하자. 변수들의 관계만 잘 파악해도 문제의 난이도가 많이 내려간다.

[Comment 4]

문제가 복잡할수록 조건과 상황을 순서에 맞춰 단계별로 잘 정리해야 한다. 조건과 상황을 잘 정리해두지 않는다면..? 분명 문제를 풀고 있긴 하지만, ‘일단 뭔가 하긴 했는데... 이거 왜 하더라..? 이 다음에 뭐 해야하지..?’와 같은 생각에 빠져 문제를 그 이상 풀 수 없을 것이다.

혹은 약간 특별한 상황이지만, 위의 문제처럼 **조건의 순서가 하나의 New 조건으로 활용**될 수 있기도 하다.

따라서, 문제를 풀 때는 항상 ‘내가 이걸 왜 하지?’ 혹은 ‘이걸 구하기 위해 이 계산을 하겠어!’와 같은 ‘문제의 목적 의식’을 기반으로 ‘조건과 상황을 순서에 맞춰 단계별로 정리’하는 습관을 갖자.

④ 최종답안

$$P_k = \frac{1}{k} \cdot \ln \frac{k}{x} \text{라 두자.}$$

제시문 (다)에서 $k=n$ 일 때 P_k 가 최댓값을 가지므로 $P_{n-1} \leq P_n \geq P_{n+1}$ 을 만족한다.

$$\begin{aligned} \text{i) } P_{n-1} \leq P_n &\Leftrightarrow \frac{1}{n-1} \ln \frac{n-1}{x} \leq \frac{1}{n} \ln \frac{n}{x} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n-1}{x}\right)^n \leq \left(\frac{n}{x}\right)^{n-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} \leq x \end{aligned}$$

$$\text{ii) 같은 방법으로 정리하면 } P_n \geq P_{n+1} \Leftrightarrow x \leq \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$$

$$\therefore \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} \leq x \leq \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < x < a_{n+1}$ 일 때 $\frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} \leq x \leq \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$ 을 만족하려면 $a_n = \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$ 이어야 함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \therefore S &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a_{n+1}}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a_n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m+1} - \frac{1-1}{1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore 1$